Método de Thwaites

Thwaites descubrió que $F(\lambda)$ era aproximadamente una recta : $\boxed{F(\lambda) = a - b\lambda}$

Con lo que :

$$\left.\begin{array}{l} F(\lambda) = 2\left[T(\lambda) - (2 + H_{12})\lambda\right] \\ \\ F(\lambda) = a - b\lambda \end{array}\right\} \longrightarrow H_{12} = \frac{T(\lambda) - \frac{a - b\lambda}{2}}{\lambda} = \frac{T(\lambda) - \frac{a}{2}}{\lambda} + \frac{b}{2} - 2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{H_{12} = \frac{2\,T(\lambda) - a}{2\lambda} + \frac{b-4}{2}}$$

Por otro lado :

$$U_e \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{dU_e/dx}\right) = a - b\lambda \xrightarrow{\cdot\, U_e^{b-1}} \underbrace{U_e^{b} \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{dU_e/dx}\right) + b\lambda\, U_e^{b-1}}_{\frac{d}{dx}\left(U_e^{b} \frac{\lambda}{dU_e/dx}\right)} = a\, U_e^{b-1} \longrightarrow$$

DERIVADA EXACTA

$$\lambda = \frac{\delta_2^2 \frac{dU_e}{dx}}{\nu}$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dx}\left(U_e^{b} \frac{\lambda}{dU_e/dx}\right) = a\, U_e^{b-1} \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(U_e^{b} \frac{\delta_2^2 U_e^{b}}{\nu}\right) = a\, U_e^{b-1} \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\delta_2^2 U_e^{b}\right) = a\nu\, U_e^{b-1}$$

Integramos la expresión anterior en x :

$$\delta_2^2 U_e^{b} = \delta_{20}^2 U_{e0}^{b} + a\nu \int_0^x U_e^{b-1}(\tilde{x})\, d\tilde{x} \longrightarrow \boxed{\delta_2^2 = \delta_{20}^2 \left[\frac{U_{e0}}{U_e(x)}\right]^b + \frac{a\nu}{U_e^{b}(x)} \int_0^x U_e^{b-1}(\tilde{x})\, d\tilde{x}}$$

c.i. : $x = x_0$: $\delta_2 = \delta_{20}$; $U_e = U_{e0}$

Thwaites propone también : $\boxed{T(\lambda) = \frac{C_f}{2} \frac{U_e \delta_2}{\nu} = (\lambda - \lambda_s)^c}$

Para hallar el valor de a y b :
- a : ajuste para C.L. de BLASIUS ($U_e = U_\infty$; $\lambda = 0$)
- b : ajuste para C.L. de FALKNER - SKAN EN FLUJO DE PR ($U_e = A x$)

Obtención de "a":

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ \delta_{20} = 0 \\ u_e = u_\infty \end{array}\right\} \longrightarrow \delta_2^2 = \frac{a\nu}{u_\infty^b}\int_0^x u_\infty^{b-1}\,d\tilde{x} = \frac{a\nu}{u_\infty}x \longrightarrow \frac{\delta_2}{x} = \sqrt{\frac{a\nu}{u_\infty x}} = \sqrt{a}\,Re_x^{-1/2}$$

$$\text{BLASIUS: } \frac{\delta_2}{x} = 0'664\,Re_x^{-1/2} \qquad \longrightarrow \boxed{a = 0'441}$$

Obtención de "b":

Como $m = 1$: $u_e = Ax$; $\frac{du_e}{dx} = A = cte$ $\qquad u_e = \frac{du_e}{dx}x$

La expresión de Thwaites queda:

$$\cancel{\delta_2^2} = \underbrace{\delta_{20}^2\left[\frac{\cancel{u_{e0}}^{\,0}}{u_e(x)}\right]^b}_{0} + \frac{a\nu}{u_e^b(x)}\int_0^x u_e^{b-1}(\tilde{x})\,d\tilde{x} = \frac{a\nu}{\left(\frac{du_e}{dx}\right)^b x^b}\int_0^x \underbrace{\left(\frac{du_e}{d\tilde{x}}\right)^{b-1}}_{cte}\tilde{x}^{b-1}\,d\tilde{x} =$$

$$= \frac{a\nu}{\frac{du_e}{dx}x^b}\int_0^x \tilde{x}^{b-1}\,d\tilde{x} = \frac{a\nu}{\frac{du_e}{dx}x^b}\left.\frac{\tilde{x}^b}{b}\right|_0^x = \frac{a\nu}{b\,\frac{du_e}{dx}} = \frac{a\,\cancel{\delta_2^2}}{b\,\lambda_{FPR-FS}} \longrightarrow b = \frac{a}{\lambda_{FPR-FS}} = 5'19 \longrightarrow \boxed{b = 5'19}$$

$$\lambda = \frac{\delta_2^2\,\frac{du_e}{dx}}{\nu}$$

0'441

0'085

A raíz de lo anterior y por simplificar:

THWAITES	THWAITES – LOITSIANSKII
$a = 0'45$	$a = 0'44$
$b = 6$	$b = 5'5$
$F(\lambda) = 0'45 - 6\lambda$	$F(\lambda) = 0'44 - 5'5\lambda$

Trata de acercase más a Blasius y Falkner - Skan

Para hallar el valor de la constante "c" recurrimos a la condición de separación:

$$C_f = 0 \rightleftarrows T(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_s} = 0 \rightleftarrows \boxed{\lambda_{s-T} = -0'09 \;;\; c = 0'62}$$

En Pohlhausen: $\lambda_{s-p} = -0'1567$

EN THWAITES LA C.L. SE SEPARA BASTANTE ANTES QUE EN POHLHAUSEN (POHLHAUSEN CONSERVADOR)

Por tanto, una buena aproximación de $T(\lambda)$ sería:

$$\boxed{T(\lambda) \approx (\lambda + 0'09)^{0'62} \approx 0'225\left(1 + \frac{\lambda}{0'09}\right)^{0'62}}$$

Factor de forma:

$$H_{12} = \frac{2T(\lambda) - a}{2\lambda} + \frac{b-4}{2} = \frac{0'225\left(1 + \frac{\lambda}{0'09}\right)^{0'62} - 0'225}{\lambda} + 1 \longrightarrow \boxed{H_{12} = 1 + 0'225\,\frac{\left(1 + \frac{\lambda}{0'09}\right)^{0'62} - 1}{\lambda}}$$

Conociendo ya los valores de a y b :

$$\boxed{\begin{gathered}\delta_2^2\, U_e^6 - \delta_{20}^2\, U_{eo}^6 = 0'45\,\nu \int_0^x U_e^5(\tilde{x})\, d\tilde{x} \\ \text{c.i.}: \; x = x_o : \; \delta_2 = \delta_{20} \; ; \; U_e = U_{eo}\end{gathered}}$$

A continuación vamos a validar Thwaites para diferentes tipos de flujo.

VALIDACIÓN CON BLASIUS

$$\lambda = \frac{\delta_2^2 \, \cancel{\frac{dU_e}{dx}}^{\,0}}{\nu} = 0 \longrightarrow T(\lambda) = T(0) = (0'09)^{0'62} = 0'225 \longrightarrow \boxed{T(\lambda)_{\text{BLASIUS}} = 0'225}$$

Para calcular el factor de forma debemos hacer $\lim_{\lambda \to 0} H_{12} = 0$ para evitar $\frac{0}{0}$:

Taylor : $(1 + \blacksquare)^a \approx 1 + a \cdot \blacksquare + \ldots$

$$H_{12} = \lim_{\lambda \to 0} \left[1 + 0'225 \, \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{0'09}\right)^{0'62} - 1}{\lambda} \right] \approx \lim_{\lambda \to 0} \left[1 + 0'225 \, \frac{0'62\,\lambda}{0'09\,\lambda} \right] \longrightarrow \boxed{H_{12} \approx 2'55}$$

BLASIUS : $H_{12} = 2'59$

Espesor de cantidad de movimiento :

$$\delta_2^2\, U_e^6 - \delta_{20}^2\, U_{eo}^6 = 0'45\,\nu \int_0^x U_e^5 \, d\tilde{x} \longrightarrow \delta_2^2 = \frac{0'45\,\nu}{U_e^6}\, U_e^5 \int_0^x d\tilde{x} = \frac{0'45\,\nu}{U_e}\, x \longrightarrow \boxed{\frac{\delta_2}{x} = 0'671\, Re_x^{-1/2}}$$

cte

BLASIUS : $\frac{\delta_2}{x} = 0'664\, Re_x^{-1/2}$

Espesor de desplazamiento :

$$\frac{\delta_1}{x} = H_{12}\, \frac{\delta_2}{x} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta_1}{x} = 1'71\, Re_x^{-1/2}}$$

BLASIUS : $\frac{\delta_1}{x} = 1'72\, Re_x^{-1/2}$

Como sabemos que $T(\lambda) = \frac{C_f}{2}\, \frac{U_e \delta_2}{\nu}$ podemos despejar el coeficiente de fricción :

$$C_f = \frac{2\,T(\lambda)\,\nu}{U_e\,\delta_2} = \frac{2\,T(0)\,\nu\,x}{U_e\,\delta_2\,x} = 2 \cdot 0'225 \cdot \underbrace{\frac{\nu}{U_e\,x}}_{Re_x^{-1}} \left(\frac{\delta_2}{x}\right)^{-1} \longrightarrow \boxed{C_f = 0'671\, Re_x^{-1/2}}$$

SE COMPORTA COMO δ_2/x COMO PASABA EN BLASIUS

BLASIUS : $\frac{\delta_2}{x} = 0'664\, Re_x^{-1/2}$

VALIDACIÓN CON FALKNER - SKAN

$\boxed{m>0}$ $\quad U_{e0} = 0 \longrightarrow \delta_{20}^2 U_{e0}^6 = 0$ ✓

$\boxed{m<0}$ $\quad U_{e0} \to \infty$ (x^m SINGULAR) ✗

$$U_e = Ax^m \neq cte \quad ; \quad \frac{dU_e}{dx} = mAx^{m-1} = \frac{m\,U_e}{x}$$

Espesor de cantidad de movimiento :

$$\delta_2^2 U_e^6 = \delta_{20}^2 U_{e0}^6 + 0'45\,\nu \int_0^x U_e^5(\tilde{x})\,d\tilde{x} = \delta_{20}^2 U_{e0}^6 + 0'45\,\nu \int_0^x A^5 \tilde{x}^{5m}\,d\tilde{x} =$$

Sabemos que $m \geq -0'09$ (separación) en Thwaites $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ siempre cumplimos $m > -1/5$ ✓✓

$$= \delta_{20}^2 U_{e0}^6 + 0'45\,\nu A^5 \left. \frac{\tilde{x}^{5m+1}}{5m+1} \right|_0^x = \underbrace{\delta_{20}^2 U_{e0}^6}_{?} + 0'45\,\nu A^5 \frac{x^{5m+1}}{5m+1}$$

Para obtener $\delta_{20}^2 U_{e0}^6$:

$\boxed{m>0}$ $\quad \delta_{20}^2 U_{e0}^6 = 0$

$\boxed{m<0}$ $\quad$ Si asumimos $\delta_{20}^2 \underbrace{U_{e0}^6}_{\to \infty \text{ al ser } m<1} \longrightarrow 0 \longrightarrow \delta_2^2 U_e^6 = 0'45\,\nu A^5 \dfrac{x^{5m+1}}{5m+1}$ $\quad$ Si $x \to 0$ $\quad \delta_2^2 U_e^6 \xrightarrow{\substack{m > -1/5 \\ \text{(se cumple siempre)}}} 0$

HIPÓTESIS CORRECTA

Por tanto : $\delta_{20}^2 U_{e0}^6 = 0$

Entonces :

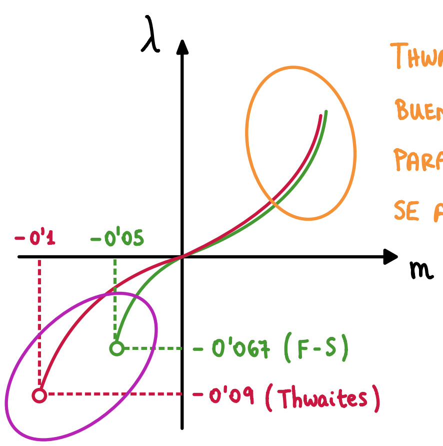
$$\delta_2^2 = \frac{0'45\,\nu A^5 x^{5m+1}}{(5m+1)\,U_e^6} \overset{U_e = Ax^m}{=} \frac{0'45\,\nu A^5 x^{5m+1}}{(5m+1)\,A^5 x^{5m}\,U_e} = \frac{0'45\,\nu}{5m+1}\,\frac{x}{U_e} \longrightarrow \boxed{\frac{\delta_2}{x} = \frac{0'671}{\sqrt{5m+1}}\,Re_x^{-1/2}}$$

Parámetro λ :

$$\lambda = \frac{\delta_2^2 \frac{dU_e}{dx}}{\nu} = \frac{\delta_2^2 \frac{m\,U_e}{x}}{\nu} = \frac{\frac{0'45\,\nu}{5m+1}\,\frac{x}{U_e}\,\frac{m\,U_e}{x}}{\nu} =$$

$$= \frac{0'45\,m}{5m+1} \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{0'45\,m}{5m+1} \quad (\lambda > -0'09)}$$

UNIFORME A LO LARGO DE "x", IGUAL QUE EN F-S CON $m>0$



THWAITES ES MUY BUENA APROXIMACIÓN PARA FLUJOS QUE SE ACELERAN

PROBLEMAS CERCA DE LA SEPARACIÓN

Tablas resumen de métodos aproximados de capa límite:

Placa plana sin ∇P_e (Blasius)	λ	$T(\lambda)$	H_{12}	$\frac{\delta_2}{x} Re_x^{1/2}$
Pohlhausen	0	0'235	2'55	0'685
Thwaites	0	0'225	2'55	0'671
Blasius (ref.)	0	0'225	2'59	0'664

Flujo de Punto de Remanso ($U_e = Ax$)	λ	$T(\lambda)$	H_{12}	$\frac{\delta_2}{x} Re_x^{1/2}$
Pohlhausen	0'077	0'332	2'31	0'277
Thwaites	0'075	0'327	2'37	0'274
F-S m = 1 (ref.)	0'085	0'342	2'22	0'291

Para flujos en los que se acelera la C.L. ($dU_e/dx > 0$) Pohlhausen es un poco mejor que Thwaites.

Flujo de Separación $C_f = 0 \rightleftarrows T(\lambda) = 0$	λ	$T(\lambda)$	H_{12}	$\frac{\delta_2}{x} Re_x^{1/2}$
Pohlhausen	-0'1567	0	3'5	NO APLICA
Thwaites	-0'09	0	3'5	NO APLICA
F-S $\lambda = \lambda_{s-FS}$ (ref.)	-0'067	0	4'03	0'687

No tenemos la función U_e para calcularlo. No son flujos concretos, sino condiciones de separación.

→ En este sí: $U_e = Ax^m$

$m = m(\lambda_{s-FS})$

Recordar que Pohlhausen era muy insensible a la deceleración en la zona exterior de la C.L. → mucho menos preciso que Thwaites cerca de separación.

Explicación de los NO APLICA de la tabla :

La condición de separación en Pahlhausen y Thwaites se basa en magnitudes locales, es decir la historia de la CL no es conocida y por tanto no se puede universalizar $\frac{\delta_2}{x} Re_x^{1/2}$ a todo x (magnitudes globales).

Como ejemplo, imaginemos que tenemos dos placas planas idénticas :

- La primera sometida a una corriente uniforme en una fracción de su longitud y posteriormente a un gradiente adverso de presiones tal que la CL se separa en x_s.
- La segunda sometida a un gradiente adverso de presiones en toda su longitud más leve que el anterior, y tal que la CL se separa en x_s.

A pesar de que la CL se separa en el mismo punto x_s, $\frac{\delta_2}{x} Re_x^{1/2}$ NO COINCIDIRÁ en ambos casos puesto que la evolución de la CL no ha sido la misma. Es por ello que no podemos poner nada en la tabla.

En el caso de Falkner - Skan la cosa cambia puesto que sí conocemos la historia de la CL hasta su separación. Además, ya vimos que en este tipo de flujos $\delta_2 \sim cte$, con lo que en $C_f = 0$ la CL estará a punto de separarse $\forall x$.